

Concursul interjudețean de matematică
”Traian Lalescu”, Ediția a XXV-a,
Reșița, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a XII-a

1. Calculați integrala

$$\int_{25}^{2011} \frac{\arctg(\sqrt{x+263})}{\arctg(\sqrt{x+263}) + \arctg(\sqrt{2299-x})} dx.$$

2. Fie (M, \cdot) o mulțime nevidă, înzestrată cu o operație binară asociativă, cu proprietatea de simplificare la dreapta și la stânga (i.e., $xa = ya \implies x = y$, resp. $ax = ay \implies x = y$) și astfel încât pentru orice $a \in M$ mulțimea $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ este finită. Arătați că (M, \cdot) este un grup.

3. Fie \mathbb{K} un corp comutativ.

a) Dacă $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, arătați că mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 + y^2 = 1$ cu $x, y \in \mathbb{K}$ este

$$\{(1, 0)\} \cup \left\{ \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2}, \frac{2r}{1 + r^2} \right) \mid r \in \mathbb{K} \right\}.$$

b) Determinați mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 + y^2 = 1$ în cazul în care $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$.

4. a) Să se calculeze integrala

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$

b) Arătați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

unde $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)$, iar $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

Notă: Timp de lucru - 3 ore